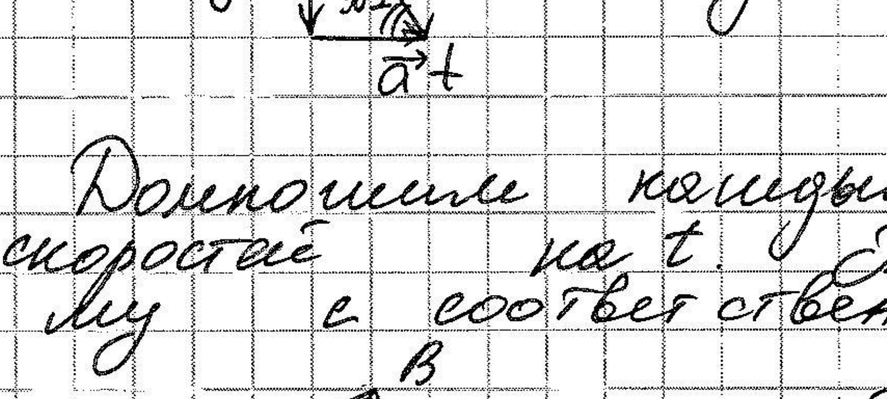
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 1

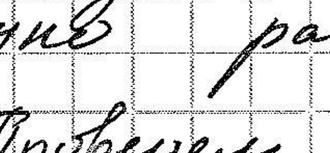
№1



$\vec{v} = \vec{v_0} + (\vec{a} + \vec{g})t.$

$\vec{a} + \vec{g} = \vec{a}_{\text{полн}}$

Векторный Δ скоростей:

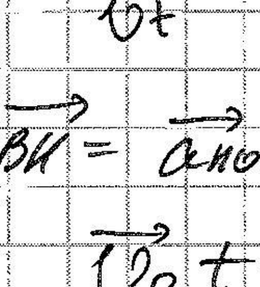


Т.к $v = v_0$, то Δ – равнобедренный.

Пусть $\angle(\vec{v_0}; \vec{v}) = 2\alpha$.

Тогда $\angle(\vec{v_0}; \vec{a}_{\text{полн}} t) = \angle(\vec{v}; \vec{a}_{\text{полн}} t) = 90° - \alpha$.

Т.к $\vec{a}_{\text{полн}} t = \vec{a}t + \vec{g}t$, то



$tg(90° - \alpha) = \frac{gt}{at} = \frac{g}{a}$.

Дополним каждый из векторов скоростей на t. Получится Δ, подобный данному с соответственно равными углами.

Проведем $AK \perp BC$.

Т.к $\triangle ABC$ – равноб, то AK – медиана и высота соотв.

значит $\angle KAC = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

$BK = KC = \frac{a_{\text{полн}} t^2}{2}$

$\vec{BK} = \vec{a}_{\text{полн}} \frac{t^2}{2}$.

Т.к $\vec{v_0}t + \frac{\vec{a}_{\text{полн}} t^2}{2} = \vec{S} = \vec{L} + \vec{h}$, то $tg \angle KAC = \frac{h}{L}$.

$tg\ \alpha = h/L$

Тогда
$$\begin{cases} tg\,\alpha = \frac{h}{L} \\ tg(90^\circ - \alpha) = \frac{g}{a} \end{cases}$$

$tg\,\alpha \cdot tg(90^\circ - \alpha) = 1$

$\frac{h}{L} \cdot \frac{g}{a} = 1 \rightarrow a = \frac{h}{L} \cdot g =$

$= \frac{5}{10} \cdot 10 = 5\ м/с^2.$

$tg\,\alpha = \frac{h}{L} = \frac{1}{2}.$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{5}}.$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}}.$

Тогда $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$

Из уравнения движения по оу:

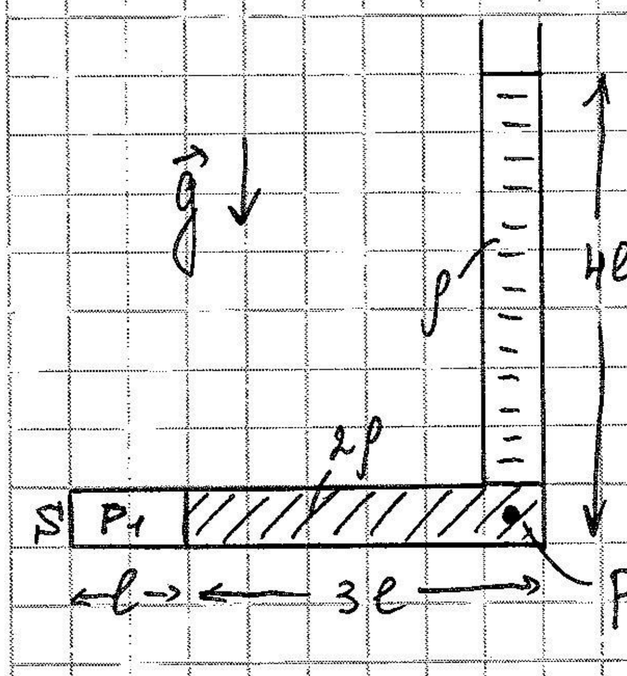
$h = \frac{0 - (v_0 \sin 2\alpha)^2}{-2g} \rightarrow v_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin 2\alpha} =$

$= \frac{\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5}}{0{,}8} = \frac{10}{0{,}8} = 12{,}5\ м/с$

Ответ: $v_0 = 12{,}5\ м/с$

$a = 5\ м/с^2.$

№5



В начальный момент времени (когда сосуд не начал вращаться) из условия равновесия для воздуха:

$P_1 S = P_{жидк} S = 4\ell \cdot \rho \cdot g \cdot S$

$P_1 = 4\rho g\ell$ – начальное давление воздуха.

Уравнение Менделеева – Клапейрона для воздуха:

$P_1 \cdot \ell \cdot S = \nu R T.$

После того, как сосуд начали вращать жидкость сдвинулась на ℓ.

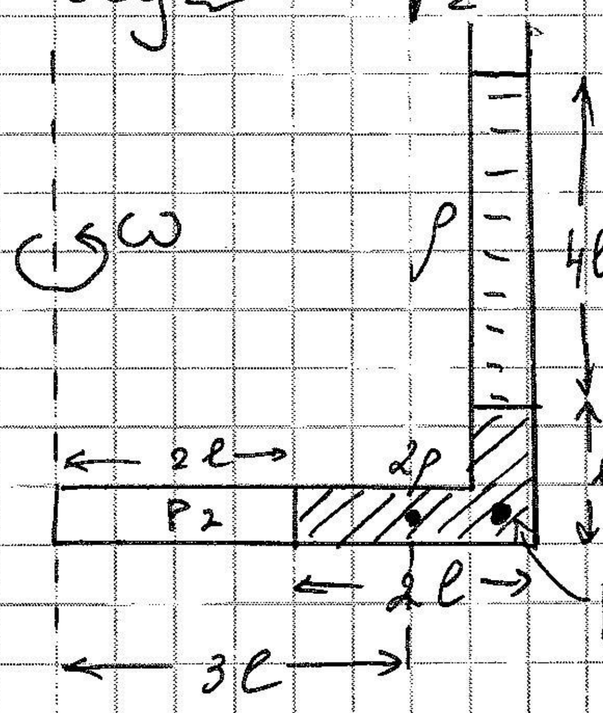
olymp.bmstu.ru

Т.к. жидкость несжимаемая, то объем воздуха увеличился на ℓS.

Тогда из ур-я Менделеева - Клапейрона для данного состояния

$$p_2 \cdot 2\ell S = \nu R T.$$

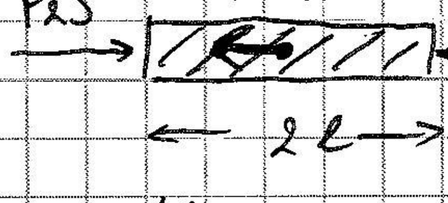
Тогда $p_2 = \frac{1}{2} p_1 = 2\rho g \ell$.



Давление нового столба жидкости

$$p_{жидк} = 4\ell\rho g + 2\rho g \ell = 6\rho g \ell.$$

Тогда рассмотрим движение части жидкости 2ρ в горизонтальной части сосуда.



По 2-му з-ну Ньютона:

$$m\omega^2 \cdot 3\ell = (p_{жидк} - p_2) S$$

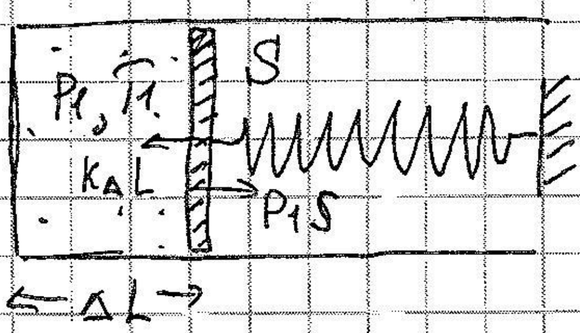
$$2\ell \cdot 2\rho \cdot S\, \omega^2 \cdot 3\ell = (6\rho g \ell - 2\rho g \ell) S$$

$$3 \cdot 4 \rho \ell^2 \omega^2 = 4 \rho g \ell$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{3\ell}}.$$

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{g}{3\ell}}$.

№4



Т.к. цилиндр поршня не была закреплена, то при охлаждении газа он сместился на ΔL.

Можно использовать оборот листа для записи решений

По 2-му з-ну Ньютона для поршня

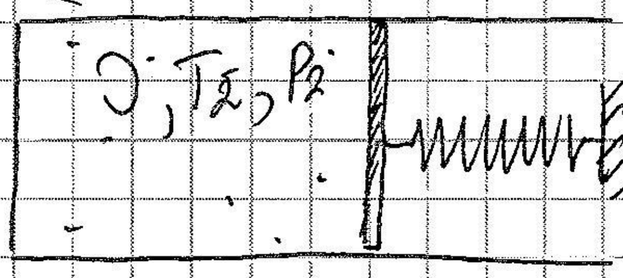
$P_1 S = k\Delta L$ (1)

Из ур-я Менделеева-Клапейрона для состояния газа

$P_1 \cdot \Delta L S = \nu R T_1$ (2)

После нагрева

$\Delta L_2 = 2\Delta L$



По 2-му з-ну Ньютона:

$k \cdot 2\Delta L = P_2 S$ (3)

Уравнение Менделеева Клапейрона:

$P_2 \cdot 2\Delta L \cdot S = \nu R T_2$ (4)

$$\begin{cases} P_1 S = k\Delta L & (1) \\ P_1 \Delta L S = \nu R T_1 & (2) \\ 2 P_2 \Delta L S = \nu R T_2 & (4) \\ P_2 S = 2 k \Delta L & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k\Delta L^2 = \nu R T_1 \\ 4 k \Delta L^2 = \nu R T_2 \end{cases} \Big| :$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 4 \rightarrow T_2 = 4T_1.$$

(4):(2) $\quad \frac{2P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1} = 4 \rightarrow P_2 = 2P_1.$

Т.к. трения в системе нет, то вся работа газа пошла на сжатие пружины.

$$A = \frac{k \cdot (2\Delta L)^2}{2} - \frac{k\Delta L^2}{2} = \frac{3 k \Delta L^2}{2}$$

$$k = \frac{2A}{3\Delta L^2} = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3 \text{ Дж}}{3 \cdot (0{,}05)^2 \text{ м}^2} = 400 \text{ кН/м}.$$

$P_1 S = k\Delta L = 400 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}$ Н $= 2000$ Н $= 2$ кН.

$P_2 S = 2 P_1 S = 4$ кН.

$\nu R T_1 = P_1 S \cdot \Delta L = 2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}$ Па$\cdot$м^3 $= 10$ Дж

$\nu R T_2 = 4 \nu R T_1 = 40$ Дж

Из 2-го начала термодинамики:

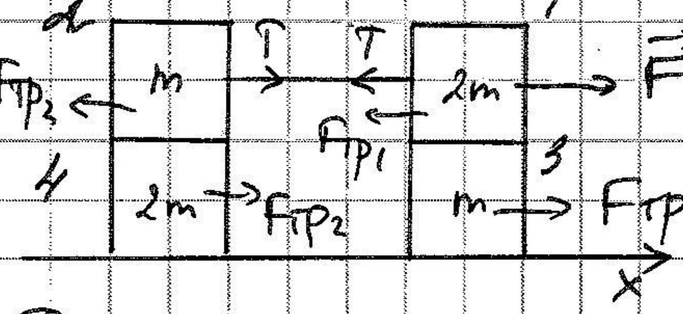
$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2} \nu R T_2 - \frac{3}{2} \nu R T_1 + A = \frac{3}{2} \cdot 40 - \frac{3}{2} 10 + 1{,}5 \cdot 10^3 =$$

$= 1545$ Дж

Ответ: $Q = 1545$ Дж.

olymp.bmstu.ru

№3



Если конструкция не рассыпается, т.е. система, то движется как

$$F = 6m \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{6m}.$$

Для того, чтобы система не нарушилась, должны выполняться следующие условия:

А) $T \leq T_0$ – иначе нить разорвется

Б) $F_{тр_1} \leq F_{тр\,сц_1} = 2\mu mg$ – иначе бруски будут
$F_{тр_2} \leq F_{тр\,сц_2} = \mu mg$ – скользить относительно друг друга.

Запишем 2-ой з-н Ньютона на ох для каждого из 4-х тел:

1: $2ma = F - T - F_{тр_1}$

2: $ma = T - F_{тр_2}$

3: $ma = F_{тр_1}$

4: $2ma = F_{тр_2}$.

Тогда из 2, 4: $T = ma + F_{тр_2} = 3ma$.

Из условия А: $T = 3ma \leq T_0$

$$\frac{3m}{6m} \cdot F \leq T_0$$

$$F \leq 2T_0 = 20\,Н.$$

Из 3: $ma = F_{тр_1} \leq 2\mu mg$
и усл. Б

$$\frac{F}{6m} \leq 2\mu mg \rightarrow F \leq 12\mu mg = 12 \cdot 0{,}5 \cdot 1 \cdot 10 = 60\,Н.$$

Из 4 и усл Б: $2ma = F_{тр_2} \leq \mu mg$

$2 \cdot \frac{F}{6m} \le \mu g \to F \le 3\mu mg = 3 \cdot 0{,}5 \cdot 1 \cdot 10 = 15$ Н.

$$\begin{cases} F \le 20\text{ Н} \\ F \le 60\text{ Н} \\ F \le 15\text{ Н} \end{cases} \qquad F \le 15\text{ Н}.$$

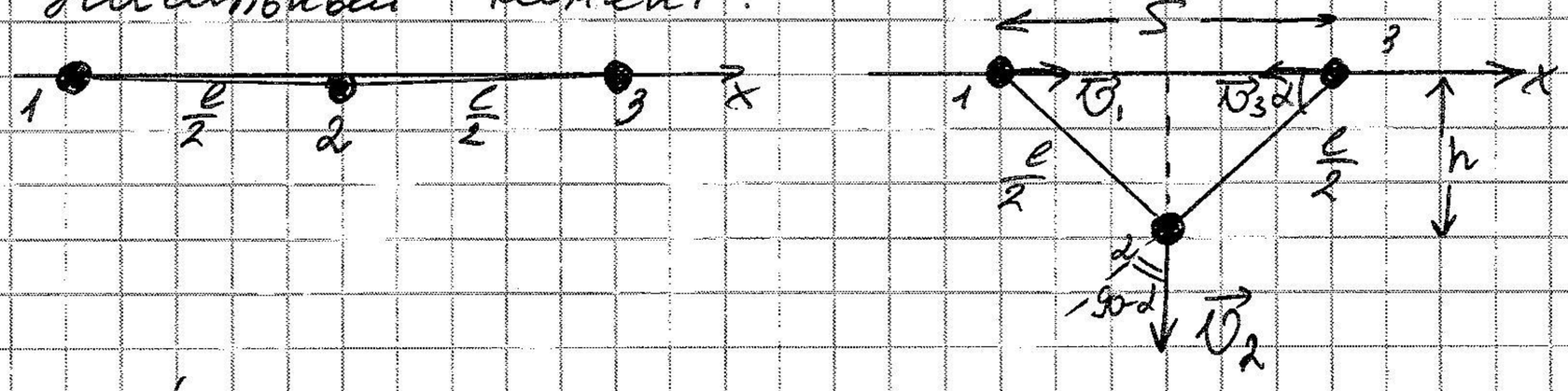
Значит, при $F = 15$ Н конструкция начнет рушиться.

Сила F достигнет значения в 15 Н при $t_0 = 14$ с.

Ответ: в момент времени $t_0 = 14$ с конструкция начнет рушиться.

№6

Начальный момент:



Т.к трения нет, импульс экрана системы сохраняется.

По ox внешних сил нет и движется импульс по ox сохраняется.

Т.к $m_1 = m_2 = m_3 = m$, а $\vec{v}_2 \perp ox$, то

$$mv_1 = mv_3 \to v_1 = v_3.$$

По з-ну сохранение энергии

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \quad (1)$$

$$\left(h = \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{S^2 + \ell^2}}{2} \text{ по теореме Пифагора}\right)$$

Т.к нить не растяжима, то проекции скоростей двух шариков на направление нити, которой они скреплены, равны.

olymp.bmstu.ru

Точка $v_2 \cdot \sin\alpha = v_1 \cos\alpha$

$$v_1 = v_2 \operatorname{tg}\alpha = v_2 \cdot \frac{h}{s/2} = v_2 \cdot \frac{2h}{s} = v_2 \cdot \frac{\sqrt{\ell^2 - s^2}}{s} \quad (2).$$

Из (1) и (2):

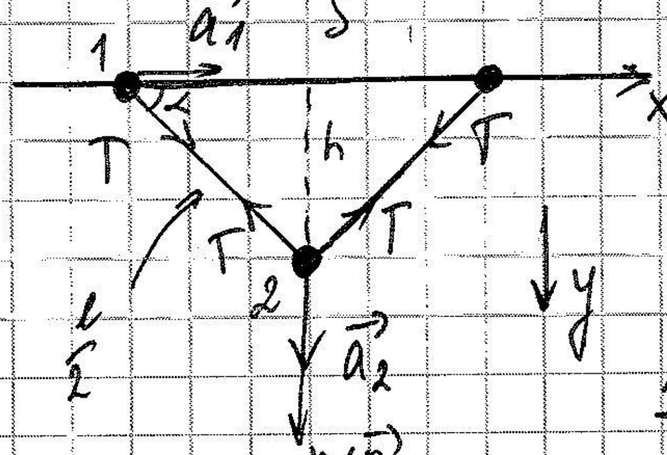
$$\begin{cases} mg \cdot \frac{\sqrt{\ell^2 - s^2}}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \\ v_1 = v_2 \cdot \frac{\sqrt{\ell^2 - s^2}}{s} \end{cases}$$

$$\frac{g}{2}\sqrt{\ell^2 - s^2} = v_2^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\ell^2 - s^2}{s^2}\right) = v_2^2 \cdot \left(\frac{\ell^2}{s^2} - \frac{1}{2}\right).$$

$$v_2^2 = \frac{g\sqrt{\ell^2 - s^2}}{2\left(\frac{\ell^2}{s^2} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{10\sqrt{1{,}5^2 - 1{,}2^2}}{2\left(\left(\frac{1{,}5}{1{,}2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{72}{17}\left(\frac{м}{с}\right)^2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{72}{17}}\ м/с = 2{,}06\ м/с.$$

$$v_1 = v_2 \cdot \frac{\sqrt{1{,}5^2 - 1{,}2^2}}{1{,}2} = \frac{3}{4} v_2 = 1{,}54\ м/с.$$



$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{4}.$$

По 2-му З-му Ньютона для

1-го тела ох: $ma_1 = T\cos\alpha$

2-го тела оу: $ma_2 = mg - 2T\sin\alpha$.

Поделим одно на другое:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{T\cos\alpha}{mg - 2T\sin\alpha} = \frac{3}{4}.$$

$$4T \cdot \frac{s}{\ell} = 3mg - 6T \cdot \frac{2h}{\ell}$$

Можно использовать оборот листа для записи решений

$T = \frac{4S + 12h}{\ell} = 3mg$

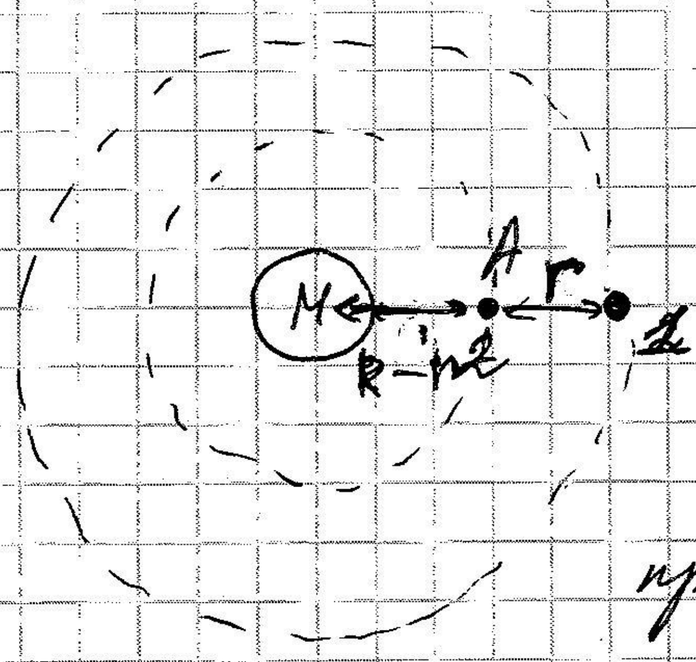
$T = \frac{3mg\ell}{4S + 6\sqrt{\ell^2 - S^2}} = \frac{3 \cdot 0{,}1 \cdot 10 \cdot 1{,}5}{4 \cdot 1{,}2 + 6\sqrt{1{,}5^2 - 1{,}2^2}} =$

$= 0{,}44\ Н.$

Ответ: $v_1 = v_3 = 1{,}54\ м/с$

$v_2 = 2{,}06\ м/с$

$T = 0{,}44\ Н.$



S_2

Пусть $T_2 = \frac{T_1}{2}$. Тогда если 1 и 2 спутники пересекались в точке А, то через $t = T_2$ 2-ой пройдет полный круг, а 1-ый окажется в диаметрально противоположной точке своей траектории.

А через $t = T_1$ оба снова окажутся в точке А

Таким образом условие что они встретятся в сутки при

$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{2}$ соблюдается.

Если $\frac{T_2}{T_1} < \frac{1}{2}$, то второй начнет первого быстрее и соответственно в первые же сутки они встретятся 2 раза.

При $\frac{T_2}{T_1} > \frac{1}{2}$ второй спутник обгонит 1-й не в точке А, соответственно это произойдет в др. время.

Тогда $\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2.$

olymp.bmstu.ru

Тогда по 2-му з-ну Ньютона для 1:

$$m\omega^2 R = G\frac{mM}{R^2}.$$

для 2:

$$m_4\omega^2(R-r) = \frac{G\cdot m_4 M}{(R-r)^2}$$

(спутн. друг с другом не взаимодействуют притягиваются т.к $m \ll M$).

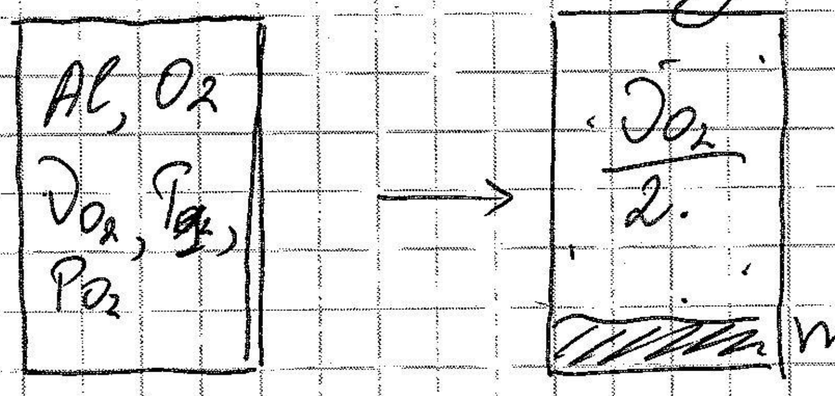
Тогда $\frac{R}{4(R-r)} = \frac{(R-r)^2}{R^2}$.

$$R^3 = 4(R-r)^3$$

$$R = \sqrt[3]{4}(R-r) \rightarrow r = R\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = 0,37R.$$

Ответ: $r = 0,37R$.

Ситуационная задача.



Для нагревания состояния кислорода.

Ур-е Менделеева-Клапейрона:

$$P_{O_2}\cdot V = \nu_{O_2} R T_1$$

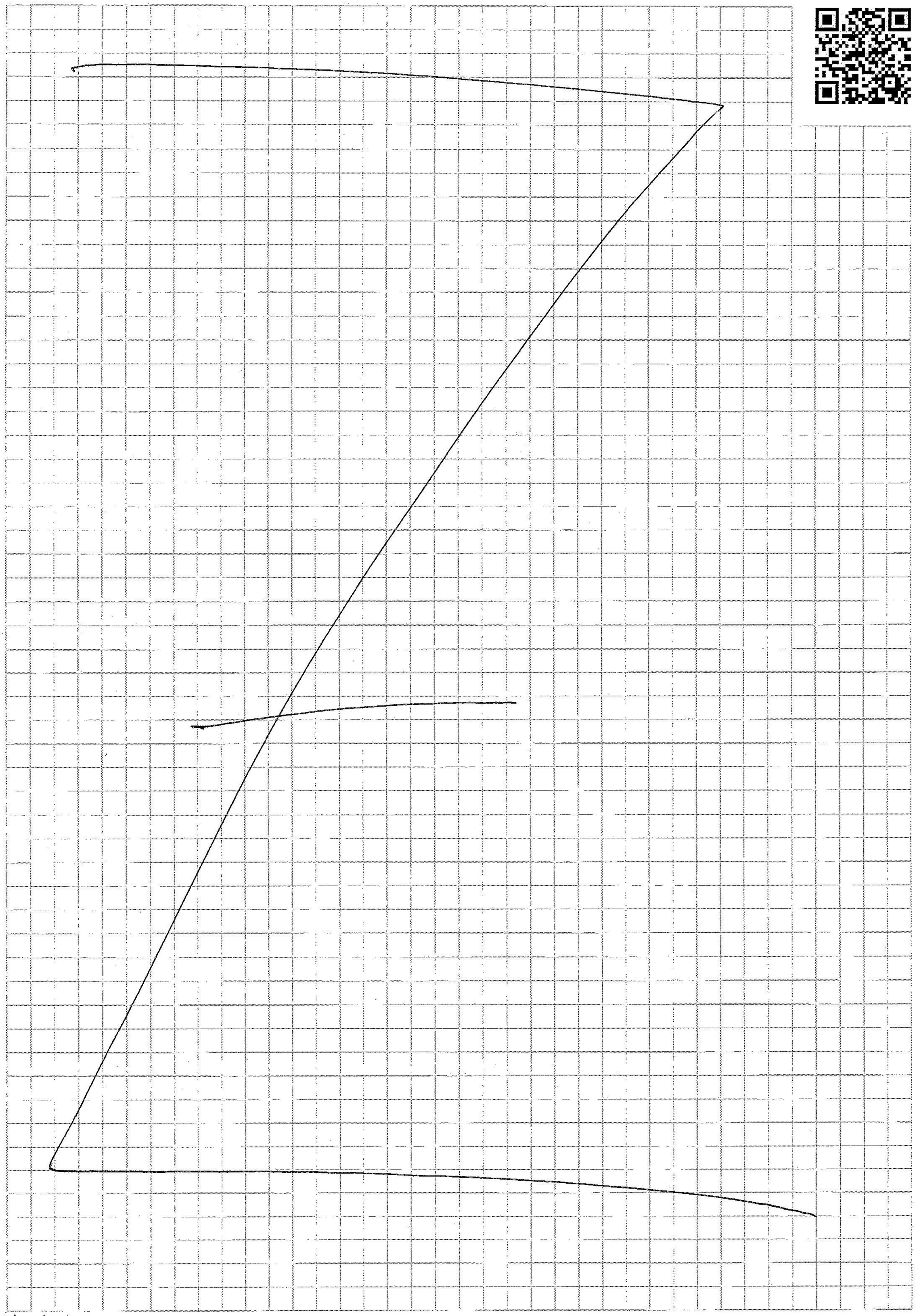
$$\nu_{O_2} = \frac{P_{O_2}V}{RT_1} = \frac{0,5\cdot 10^5\cdot 1\cdot 10^{-3}}{8,31\cdot 293} = 0,02 \text{ моль}$$

$$m_{O_2} = \nu_{O_2}\cdot M_{O_2} = 0,02 \text{ моль}\cdot 32\frac{г}{моль} = 0,64 \text{ г}.$$

Из 2-го начала термодинамики

$$Q = \Delta U_{O_2} = \frac{5}{2}\frac{\nu_{O_2}}{2}RT_2 - \frac{5}{2}\nu_{O_2}RT_1 = \frac{5}{2}\nu_{O_2}R\left(\frac{T_2}{2}-T_1\right).$$

($A_{O_2} = 0$ т.к $V = const$).



olymp.bmstu.ru